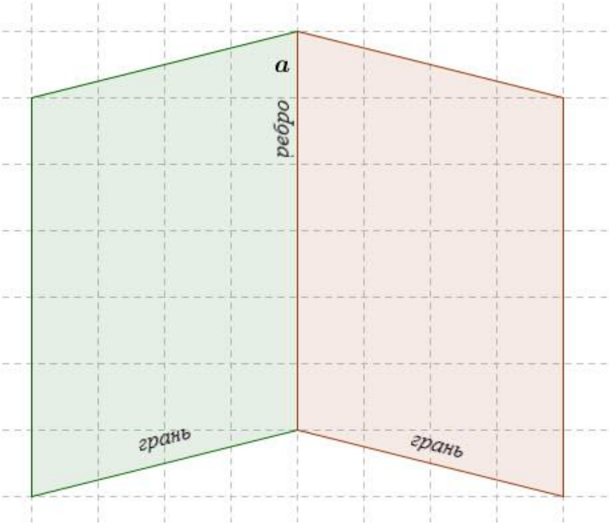
Тема: Двугранный угол

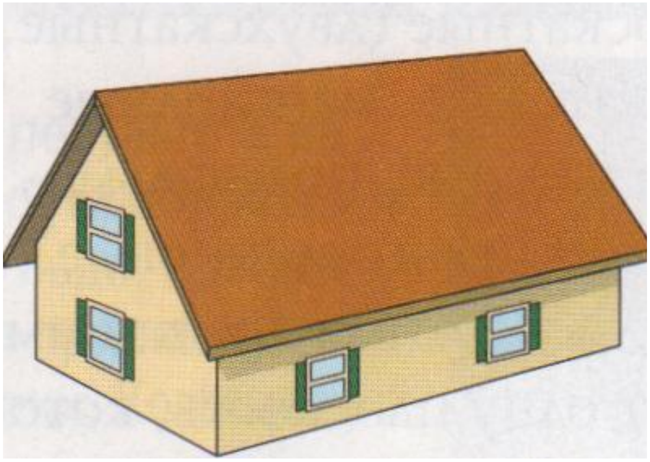
➢ *Определение*



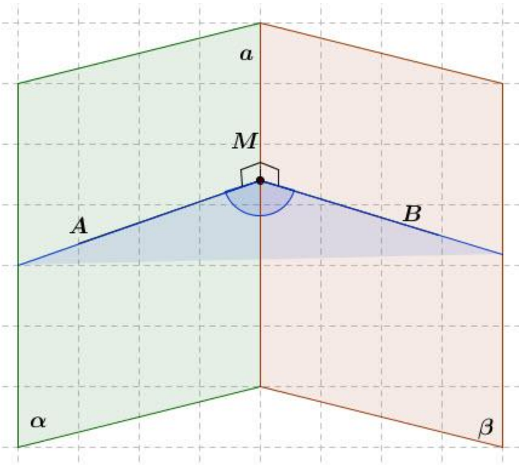
Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости.

Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его *гранями*.

Общая граница полуплоскостей называется *ребром* двугранного угла.



➢ *Как измерить двугранный угол?*



$\alpha \cap \beta = a$, $M \in a$; $A \in \alpha$, $AM \perp a$; $B \in \beta$, $BM \perp a$.

$\angle AMB$ – *линейный угол двугранного угла с ребром* a.

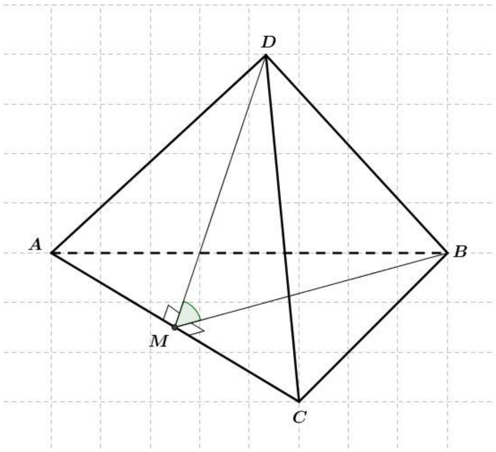
Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла.

Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

Задача №167.

В тетраэдре $DABC$ все ребра равны, точка M – середина ребра AC. Докажите, что $\angle DMB$ – линейный угол двугранного угла $BACD$.



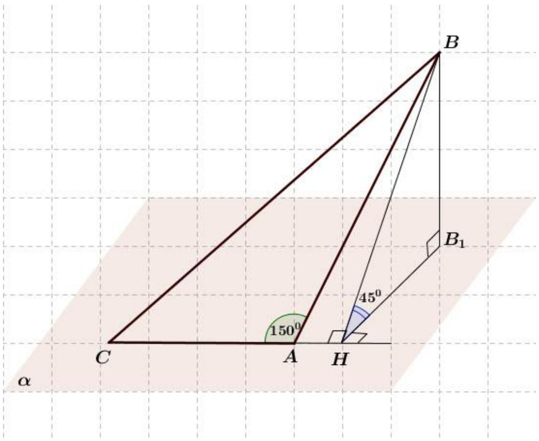
Дано: $ABCD$ – правильный тетраэдр, M – середина ребра AC.
Доказать: $\angle DMB$ – линейный угол двугранного угла $BACD$.
Доказательство:
$\triangle ADC$ – равносторонний, DM – медиана, высота;
$\triangle ABC$ – равносторонний, BM – медиана, высота.

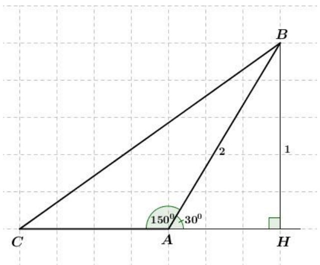
$$\left.\begin{array}{l} ADC \cap ABC = AC \\ DM \perp AC \\ BM \perp AC \end{array}\right| \Rightarrow \angle DMB \text{ – линейный угол}$$

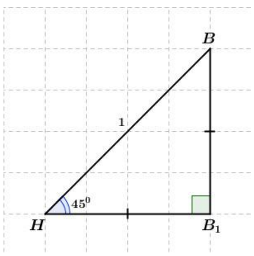
двугранного угла $BACD$.

Задача №170.

Из вершины B треугольника ABC, сторона AC которого лежит в плоскости α, проведен к этой плоскости перпендикуляр BB_1. Найдите расстояние от точки B до прямой AC и до плоскости α, если $AB = 2$ см, $\angle BAC = 150^\circ$ и двугранный угол $BACB_1$ равен 45°.





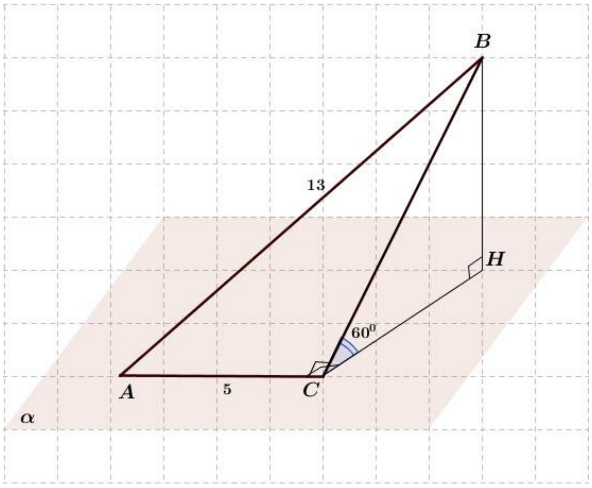


Решение:
1) $AC \in \alpha$; $BB_1 \perp \alpha \Rightarrow \rho(B,\alpha) = BB_1$.
$\triangle ABC$ – тупоугольный, поэтому основание перпендикуляра, проведенного из вершины B к прямой AC, находится на продолжении стороны AC.
Проведем $BH \perp AC$, значит, $\rho(B, AC) = BH$.
B_1H – проекция наклонной BH на плоскость α и т.к. $BH \perp AC$, то по обратной теореме о трех перпендикулярах $B_1H \perp AC$.
Тогда $\angle BHB_1 = 45^\circ$ – линейный угол двугранного угла $BACB_1$.
2) В $\triangle ABC$ внешний угол BAH равен 30°, тогда в прямоугольном $\triangle ABH$ $BH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ (свойство катета, лежащего напротив угла в 30°).
$\triangle BB_1H$ – прямоугольный равнобедренный, т.к. $\angle BHB_1 = 45^\circ$, тогда $BH = BB_1\sqrt{2}$, $BB_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\rho(B,\alpha) = BB_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\rho(B, AC) = BH = 1$.

Задача №172.

Катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежит в плоскости α, а угол между плоскостями α и ABC равен 60°. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если $AC = 5$, $AB = 13$.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC \in \alpha$, $AC = 5$, $ABC\ \alpha = 60^\circ$.

Найти: $\rho(B,\alpha)$.

Решение:

$ABC \cap \alpha = AC$, $BC \perp AC$ по условию, $HC \perp AC$ по обратной теореме о трех перпендикулярах, следовательно, $\angle BCH -$ линейный угол двугранного угла между плоскостью α и плоскостью ABC и $\angle BCH = 60^\circ$.

В $\triangle ABC$ $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

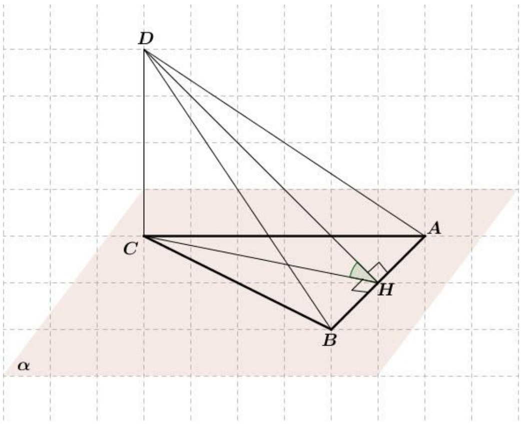
В $\triangle BCH$ $BH = BC \cdot \sin\angle BCH = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Т.к. $BH \perp \alpha$, то $\rho(B,\alpha) = BH = 6\sqrt{3}$

Ответ: $6\sqrt{3}$.

Задача №173.

Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно к плоскости ABC, $AB = BC = AC = 6$, $BD = 3\sqrt{7}$. Найдите двугранные углы $DABC$, $BDCA$.



Решение:

1) Двугранный угол $DABC$ - это угол между плоскостями DAB и ACB.

$$\left.\begin{array}{l} DAB \cap ABC = AB \\ CH \perp AB \\ DH \perp AB \end{array}\right| \Rightarrow \angle CHD -$$ линейный угол двугранного угла $DABC$.

В $\triangle ABC$ $CH = AB \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ как высота равностороннего треугольника.

В $\triangle DCB$ $DC = \sqrt{DB^2 - BC^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{7}\right)^2 - 6^2} = 3\sqrt{3}$.

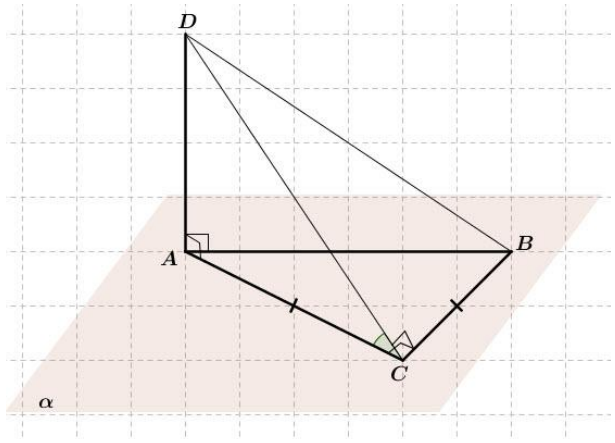
В $\triangle DCH -$ прямоугольный, равнобедренный, т.к. $DC = CH$ и $DC \perp ABC$, поэтому $\angle CHD = 45^\circ$.

2) Двугранный угол $BDCA$ - это угол между плоскостями BDC и DCA.

$$\left.\begin{array}{l} BDC \cap DCA = DC \\ AC \perp DC \\ BC \perp DC \end{array}\right| \Rightarrow \angle ACB -$$ линейный угол двугранного угла $BDCA$. $\triangle ABC -$ равносторонний, $\angle ACB = 60^\circ$.

Задача №174.

Найдите двугранный угол $ABCD$, если углы DAB, DAC и ACB прямые, $AC = CB = 5$, $DB = 5\sqrt{5}$.



Решение:

$\left.\begin{array}{l} AD \perp ABC \\ AC \perp BC \end{array}\right| \Rightarrow DC \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах.

$\left.\begin{array}{l} ABC \cap BCD = BC \\ AC \perp BC \\ DC \perp BC \end{array}\right| \Rightarrow \angle DCA -$ линейный угол двугранного угла $ABCD$.

$\triangle DBC -$ прямоугольный.

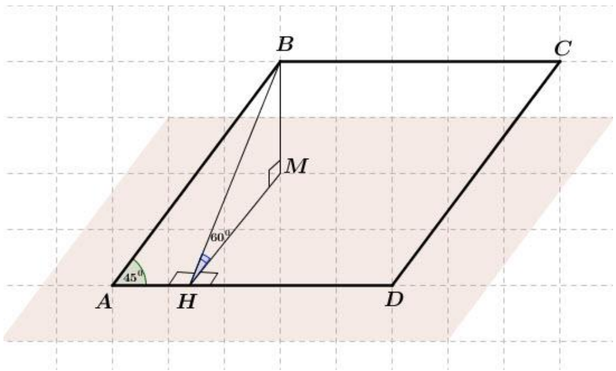
В $\triangle DBC$ $DC = \sqrt{DB^2 - BC^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^2 - 5^2} = 10$.

В $\triangle ADC$ $\cos\angle DCA = \dfrac{AC}{DC} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$, $\angle DCA = 60^\circ$.

Ответ: 60.

Задача №176.

Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость ADM так, что двугранный угол $BADM$ равен 60°. Найдите сторону ромба, если $\angle BAD = 45^\circ$ и расстояние от точки B до плоскости ADM равно $4\sqrt{3}$.



Решение:

$BM \perp ADM \Rightarrow \rho\left(B, ADM\right) = BM = 4\sqrt{3}$.

$\left.\begin{array}{l} ABCD \cap ADM = AD \\ BH \perp AD \\ MH \perp AD \end{array}\right| \Rightarrow \angle BHM -$ линейный угол двугранного угла $BADM$, $\angle BHM = 60^\circ$.

В $\triangle BMH$ $BH = \dfrac{BM}{\sin\angle BHM} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8$.

В ABH $AB = \dfrac{BH}{\sin 45^\circ} = \dfrac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 8\sqrt{2}$.

Ответ: $8\sqrt{2}$.